第27卷 第3期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 3
2010年06月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　June 2010

文章编号:1005-3085(2010)03-0403-12

中立型灰色随机分布时滞系统的指数鲁棒稳定性*

苏春华[1]， 刘思峰[2]

(1- 信阳师范学院数学与信息科学学院，信阳 464000;
2- 南京航空航天大学经济与管理学院，南京 210016)

摘　要: 为了得到一类中立型灰色随机分布时滞系统的指数鲁棒稳定性，本文利用Lyapunov-Krasovskii泛函法、灰矩阵的连续矩阵覆盖的分解技术和Itô公式，分别得到了以非线性矩阵不等式和线性矩阵不等式(LMI)表示的该系统指数鲁棒稳定的时滞依赖性判据。对非线性矩阵不等式判据，我们给出了一般性算法，解决了非线性矩阵不等式判据不便于实际应用的问题。数值例子表明，本文所给判据是有效的，且系统的指数稳定性和时滞，随着绝对灰度矩阵的谱范数的增大而减小。

关键词: 中立随机系统；分布时滞；指数鲁棒稳定性；灰矩阵；线性矩阵不等式

分类号: **AMS**(2000) 93E15; 34K50　　**中图分类号**: N941.5; O231.3　　**文献标识码**: A

1　引言

由于随机微分系统在自然、社会和科技等领域具有广泛的应用，所以，近三十多年来，关于随机微分系统的稳定与控制问题，一直是很多学者关注的焦点问题，并取得了许多有价值的成果[1]。其间，在二十世纪八十年代，Kolmanovaskii和Nosov基于化学工程和航空理论发展的需要，还建立了一类中立型随机泛函微分系统，并研究了该系统解的存在性、唯一性[2]、稳定性和渐近稳定性[3]的问题。此后，一些学者又利用Lyaponuv泛函和Razumikhin技术，研究了中立型随机系统的指数稳定问题，得到了一些指数稳定的代数判据[4-6]。2007年，Randjelovic和Jankovic则基于一个关于向量范数的p-阶矩不等式，给出了中立型随机系统的p-阶矩指数稳定的代数判据[7]，且该判据还是文献[8]的结果的推广。然而，关于中立型不确定随机系统的研究，目前仅有少量的报道。如文献[9]在建立了中立型随机系统的LaSalle不变原理的基础上，应用该原理讨论了中立型不确定随机系统的随机渐近稳定性和几乎必然指数稳定的代数判据。文献[10]则给出了中立型不确定随机系统的鲁棒镇定和H_∞控制的一种状态反馈控制器的设计方法。至于有关中立型随机分布时滞系统的研究，目前还没有相关报道。灰色系统理论是从另一个角度来研究和处理自然和社会系统中的不确定问题的一个典型工具，它能有效处理不确定系统的稳定与控制问题。但是，中立型灰色随机分布时滞系统的鲁棒稳定与控制问题，还没有人涉及。另外，在研究中立型不确定非随机系统时，所采用的一些模型变换方法，不适用于处理中立型不确定随机系统的问题，因为中立型随机系统的解，一般是不可微。因此，本文将用Lyapunov-Krasovskii泛函法、灰矩阵的连续矩阵覆盖的分解技术和一些基本不等式，研究一类中立型灰色随机分布时滞系统的指数鲁棒稳定性问题，给出其指数鲁棒稳定性的线性矩阵不等式条件。

收稿日期: 2008-07-21. **作者简介**: 苏春华(1965年11月生)，男，博士，副教授. 研究方向：不确定随机系统理论.
***基金项目**: 河南省自然科学基金(0611054400)；河南省教育厅自然科学基金(2008A110015).

2 系统描述

设 $\tau>0$, $\mathrm{C}([-\tau,0];\mathrm{R}^n)$ 是定义在 $[-\tau,0]$ 上并取值于 R^n 上的连续函数 φ 的全体。$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}, \mathrm{P})$ 是一个具有自然流 $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$ 的完备概率空间，$w(t)$ 是定义在概率空间上的一维的标准布朗运动。$\mathrm{L}^2_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathrm{R}^n)$ 表示 $\mathcal{F}_t$ 可测的取值于 $\mathrm{C}([-\tau,0];\mathrm{R}^n)$ 上的随机变量 $\xi=\{\xi(\theta):-\tau\leq\theta\leq 0\}$ 的全体且使得

$$\sup_{-\tau\leq\theta\leq 0}\mathrm{E}|\xi(\theta)|^2<\infty.$$

$x_t=\{x(t+\theta):-\tau\leq\theta\leq 0\}$ 是取值于 $\mathrm{C}([-\tau,0];\mathrm{R}^n)$ 上的随机过程。令 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示一个向量和一个矩阵的欧氏范数。如果 A 是一个对称矩阵，用符号 $A\leq 0$ 和 $A<0$ 分别表示 A 是一个半负定和负定矩阵，并用 $\lambda_{\max}(A)$ 和 $\lambda_{\min}(A)$ 分别表示它的最大和最小特征值。另外，令 A^T 表示 A 的转置，$\otimes$, $A(\otimes)$, $\tilde{\otimes}$ 和 $A(\tilde{\otimes})$ 分别表示一个灰数、灰矩阵、白化数和白化矩阵。

定义 1 如果灰矩阵 $A(\otimes)$ 中的灰元素的数值覆盖全是连续覆盖，那么这个灰矩阵 $A(\otimes)$ 的矩阵覆盖被称为连续矩阵覆盖[11]，并称这样的灰矩阵为具有连续覆盖的灰矩阵或简称区间灰矩阵。

基于下面的一个中立型随机分布时滞系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}\big[x(t)-Fx(t-\tau)\big]=\big[Ax(t)+Bx(t-\tau)+\int_{t-\tau}^{t}G(t-s)x(s)\mathrm{d}s\big]\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad+\big[Cx(t)+Dx(t-\tau)\big]\mathrm{d}w(t),\quad t\geq 0,\\ x(t)=\xi(t),\quad \xi\in\mathrm{L}^2_{\mathcal{F}_0}\big([-\tau,0];\mathrm{R}^n\big),\quad -\tau\leq t\leq 0.\end{cases}\tag{1}$$

我们给出中立型灰色随机分布时滞系统及其指数鲁棒稳定性的定义。

定义 2 如果系统 (1) 的系数矩阵 F, A, B, C, D 和权重矩阵 $G(t)$ 中至少有一个灰矩阵，那么系统 (1) 被称之为中立型灰色随机分布时滞系统。

本文考虑下述一个中立型灰色随机分布时滞系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}\big[x(t)-F(\otimes)x(t-\tau)\big]=\big[A(\otimes)x(t)+B(\otimes)x(t-\tau)+\int_{t-\tau}^{t}G(t-s)x(s)\mathrm{d}s\big]\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad+\big[C(\otimes)x(t)+D(\otimes)x(t-\tau)\big]\mathrm{d}w(t),\quad t\geq 0,\\ x(t)=\xi(t),\quad \xi\in\mathrm{L}^2_{\mathcal{F}_0}\big([-\tau,0];\mathrm{R}^n\big),\quad -\tau\leq t\leq 0,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $x(t)\in\mathrm{R}^n$, $A(\otimes)$, $B(\otimes)$, $C(\otimes)$, $D(\otimes)$ 和 $F(\otimes)$ 是 $n\times n$ 维的具有连续矩阵覆盖的灰矩阵，它们的连续矩阵覆盖或白化矩阵集分别为

$$A_I=[L_a,U_a]=\big\{A(\tilde{\otimes})=(\tilde{\otimes}_{aij})_{n\times n}:\underline{a}_{ij}\leq\tilde{\otimes}_{aij}\leq\overline{a}_{ij},\ i,j=1,\cdots,n\big\},$$

$$B_I=[L_b,U_b]=\big\{B(\tilde{\otimes})=(\tilde{\otimes}_{bij})_{n\times n}:\underline{b}_{ij}\leq\tilde{\otimes}_{bij}\leq\overline{b}_{ij},\ i,j=1,\cdots,n\big\},$$

$$C_I=[L_c,U_c]=\big\{C(\tilde{\otimes})=(\tilde{\otimes}_{cij})_{n\times n}:\underline{c}_{ij}\leq\tilde{\otimes}_{cij}\leq\overline{c}_{ij},\ i,j=1,\cdots,n\big\},$$

$$D_I=[L_d,U_d]=\big\{D(\tilde{\otimes})=(\tilde{\otimes}_{dij})_{n\times n}:\underline{d}_{ij}\leq\tilde{\otimes}_{dij}\leq\overline{d}_{ij},\ i,j=1,\cdots,n\big\},$$

$$F_I=[L_f,U_f]=\big\{F(\tilde{\otimes})=(\tilde{\otimes}_{fij})_{n\times n}:\underline{f}_{ij}\leq\tilde{\otimes}_{fij}\leq\overline{f}_{ij},\ i,j=1,\cdots,n\big\}.$$

$G(t)$ 是一个 $n\times n$ 的矩阵有理函数。设在初始条件 $x(t)=\xi(t)\in\mathrm{L}^2_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathrm{R}^n)$ 下，系统 (2) 的解 $x(t;\xi)$ 相应于初始值 $\xi(t)=0$，其平凡解 $x(t;0)\equiv 0$。

定义 3 对于任意的白化矩阵 $A(\tilde{\otimes}) \in A_I$，$B(\tilde{\otimes}) \in B_I$，$C(\tilde{\otimes}) \in C_I$，$D(\tilde{\otimes}) \in D_I$ 和 $F(\tilde{\otimes}) \in F_I$ 及任意的 $\xi \in \mathrm{L}^2_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathrm{R}^n)$，如果存在正常数 r_0 和 K，使得系统 (2) 的解满足

$$\mathrm{E}\left|x(t;\xi)\right|^2 \le K\mathrm{e}^{-r_0 t} \sup_{-\tau\le\theta\le 0} \mathrm{E}\left|\xi(\theta)\right|^2, \quad t \ge 0,$$

或等价地

$$\limsup_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\ln \mathrm{E}\left|x(t;\xi)\right|^2\right] \le -r_0,$$

那么称系统 (2) 是均方指数鲁棒稳定的；如果有

$$\limsup_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\ln \left|x(t;\xi)\right|\right] \le -\frac{r_0}{2}, \quad a.s.,$$

那么称系统 (2) 是几乎必然指数鲁棒稳定的。

引理 1[12] 如果 $W(\otimes)$ 是一个 $m \times n$ 的灰矩阵，它具有连续矩阵覆盖

$$W_I = [L_w, U_w] = \left\{W(\tilde{\otimes}) = (\tilde{\otimes}_{wij})_{m\times n} : \underline{w}_{ij} \le \tilde{\otimes}_{wij} \le \overline{w}_{ij},\ i = 1,\cdots,m,\ j = 1,\cdots,n\right\},$$

那么对任意的白化矩阵 $W(\tilde{\otimes}) \in W_I$ 都有

$$W(\tilde{\otimes}) = L_w + \triangle W \quad 且 \quad \|\triangle W\| \le \|U_w - L_w\|,$$

其中

$$U_w = (\overline{w}_{ij})_{m\times n}, \quad L_w = (\underline{w}_{ij})_{m\times n}, \quad \triangle W = (k_{ij}\tilde{\gamma}_{ij})_{m\times n}, \quad k_{ij} = \overline{w}_{ij} - \underline{w}_{ij}, \quad \tilde{\gamma}_{ij} \in [0,1],$$

$[0,1]$ 是单位灰数 $\gamma(\otimes)$ 的连续数值覆盖。

引理 2 (Schur 补) 对于给定的对称矩阵

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $S \in \mathrm{R}^{n\times n}$，$S_{11} \in \mathrm{R}^{r\times r}$，$r < n$，有

$$S < 0 \Leftrightarrow S_{22} < 0, \quad S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^T < 0.$$

3 主要结果

定理 1 设 $k = \|L_f\| + \|U_f - L_f\| < 1$。如果存在正常数 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_9$ 及正定矩阵 Q 和 R，使得

$$\lambda_{\min}(R) \ge (\varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_6^{-1})\tau \sup_{0\le s\le\tau} \|G(s)\|^2, \tag{3}$$

$$M := \begin{pmatrix} M_1 + \mu_1 I_n & L_b + L_c^T L_d - L_a^T L_f \\ L_b^T + L_d^T L_c - L_f^T L_a & M_2 + \mu_2 I_n \end{pmatrix} < 0,$$

其中 I_n 表示 $n\times n$ 单位矩阵

$$M_1=L_a+L_a^T+\varepsilon_3L_a^TL_a+(1+\varepsilon_7)L_c^TL_c+Q+\tau R,$$

$$\mu_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\|U_a-L_a\|+(\varepsilon_4^{-1}+\varepsilon_5)\|U_a-L_a\|^2$$
$$+2\|U_c-L_c\|\|L_c\|+(1+\varepsilon_8^{-1}+\varepsilon_9)\|U_c-L_c\|^2,$$

$$M_2=(\varepsilon_4+\varepsilon_6)L_f^TL_f+(1+\varepsilon_8)L_d^TL_d-L_f^TL_b-L_b^TL_f-Q,$$

$$\mu_2=\varepsilon_1^{-1}\|U_b-L_b\|^2+(\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_5^{-1})\|U_f-L_f\|^2+\varepsilon_6\big(\|U_f-L_f\|^2+2\|U_f-L_f\|\|L_f\|\big)$$
$$+(1+\varepsilon_7^{-1}+\varepsilon_9^{-1})\|U_d-L_d\|^2+2\|U_f-L_f\|\|L_b\|+2\|U_b-L_b\|\|L_f\|$$
$$+2\|U_f-L_f\|\|U_b-L_b\|+2\|U_d-L_d\|\|L_d\|,$$

那么系统 (2) 是均方指数鲁棒稳定的，且 Lyapunov 指数为 $-r_0$。而 r_0 满足：$r_0>0$, $k\,\mathrm{e}^{r_0\tau}<1$ 及

$$r_0(1+k^2)+\lambda_{\max}(M)+r_0\lambda_{\max}(Q)\tau\mathrm{e}^{r_0\tau}+r_0\lambda_{\max}(R)\tau^2\mathrm{e}^{r_0\tau}\le 0.$$

证明 对任意固定的 $\xi\in \mathrm{L}^2_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathrm{R}^n)$ 和白化矩阵 $A(\tilde\otimes)\in A_I$, $B(\tilde\otimes)\in B_I$, $C(\tilde\otimes)\in C_I$, $D(\tilde\otimes)\in D_I$ 及 $F(\tilde\otimes)\in F_I$，记系统 (2) 的解 $x(t;\xi)=x(t)$，另记

$$y(t)=x(t-\tau),\quad z(t)=\int_{t-\tau}^{t}G(t-s)x(s)\mathrm{d}s.$$

对于 $(t,x)\in\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^n$，取 Lyapunov-Karsovskii 泛函

$$V\big(t,x(t)\big)=\big[x(t)-F(\tilde\otimes)y(t)\big]^T\big[x(t)-F(\tilde\otimes)y(t)\big]+\int_{t-\tau}^{t}x^T(s)Qx(s)\mathrm{d}s+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}x^T(s)Rx(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

则利用 Itô 公式中的弱无穷小算子 LV，沿着系统 (2) 的白化系统的迹计算得

$$\begin{aligned}LV\big(t,x(t)\big)=\;&x^T(t)(Q+\tau R)x(t)-y^T(t)Qy(t)-\int_{t-\tau}^{t}x^T(s)Rx(s)\mathrm{d}s+2x^T(t)A(\tilde\otimes)x(t)\\&-2y^T(t)F^T(\tilde\otimes)A(\tilde\otimes)x(t)+2x^T(t)B(\tilde\otimes)y(t)+2x^T(t)z(t)\\&-2y^T(t)F^T(\tilde\otimes)B(\tilde\otimes)y(t)-2y^T(t)F(\tilde\otimes)z(t)+x^T(t)C^T(\tilde\otimes)C(\tilde\otimes)x(t)\\&+2y^T(t)D^T(\tilde\otimes)C(\tilde\otimes)x(t)+y^T(t)D^T(\tilde\otimes)D(\tilde\otimes)y(t).\end{aligned}\tag{4}$$

于是，由引理 1 可推得

$$\begin{aligned}2x^T(t)A(\tilde\otimes)x(t)&=x^T(t)(L_a+L_a^T)x(t)+2x^T(t)\triangle Ax(t)\\&\le x^T(t)(L_a+L_a^T)x(t)+2\|U_a-L_a\|x^T(t)x(t),\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}2x^T(t)B(\tilde\otimes)y(t)\le\;&x^T(t)L_by(t)+y^T(t)L_b^Tx(t)+\varepsilon_1x^T(t)x(t)\\&+\varepsilon_1^{-1}\|U_b-L_b\|^2y^T(t)y(t),\end{aligned}\tag{6}$$

$$2x^T(t)z(t) \le \varepsilon_2 x^T(t)x(t) + \varepsilon_2^{-1} z^T(t)z(t), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}-2y^T(t)F^T(\tilde{\otimes})A(\tilde{\otimes})x(t) = & -y^T(t)L_f^T L_a x(t) - x^T(t)L_a^T L_f y(t) - 2y^T(t)\triangle F^T L_a x(t) \\ & - 2y^T(t)L_f^T \triangle A x(t) - 2y^T(t)\triangle F^T \triangle A x(t),\end{aligned} \tag{8}$$

$$-2y^T(t)\triangle F^T L_a x(t) \le \varepsilon_3 x^T(t)L_a^T L_a x(t) + \varepsilon_3^{-1}\|U_f - L_f\|^2 y^T(t)y(t), \tag{9}$$

$$-2y^T(t)L_f^T \triangle A x(t) \le \varepsilon_4 \|U_a - L_a\|^2 x^T(t)x(t) + \varepsilon_4^{-1} y^T(t)L_f^T L_f y(t), \tag{10}$$

$$-2y^T(t)\triangle F^T \triangle A x(t) \le \varepsilon_5 \|U_a - L_a\|^2 x^T(t)x(t) + \varepsilon_5^{-1}\|U_f - L_f\|^2 y^T(t)y(t). \tag{11}$$

类似地，

$$\begin{aligned}-2y^T(t)F^T(\tilde{\otimes})B(\tilde{\otimes})y(t) \le & -y^T(t)(L_f^T L_b + L_b^T L_f)y(t) + \big(2\|U_f - L_f\|\|L_b\| \\ & + 2\|U_b - L_b\|\|L_f\| + 2\|U_f - L_f\|\|U_b - L_b\|\big)y^T(t)y(t),\end{aligned} \tag{12}$$

$$-2y^T(t)F(\tilde{\otimes})z(t) \le \varepsilon_6 y^T(t)F^T(\tilde{\otimes})F(\tilde{\otimes})y(t) + \varepsilon_6^{-1} z^T(t)z(t), \tag{13}$$

$$y^T(t)F^T(\tilde{\otimes})F(\tilde{\otimes})y(t) \le y^T(t)L_f^T L_f y(t) + \big(2\|U_f - L_f\|\|L_f\| + \|U_f - L_f\|^2\big)y^T(t)y(t), \tag{14}$$

$$x^T(t)C^T(\tilde{\otimes})C(\tilde{\otimes})x(t) \le x^T(t)L_c^T L_c x(t) + \big(2\|U_c - L_c\|\|L_c\| + \|U_c - L_c\|^2\big)x^T(t)x(t), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}2y^T(t)D^T(\tilde{\otimes})C(\tilde{\otimes})x(t) \le & \; y^T(t)L_d^T L_c x(t) + x^T(t)L_c^T L_d y(t) + \varepsilon_7 x^T(t)L_c^T L_c x(t) \\ & + \varepsilon_7^{-1}\|U_d - L_d\|^2 y^T(t)y(t) + \varepsilon_8 y^T(t)L_d^T L_d y(t) \\ & + \varepsilon_8^{-1}\|U_c - L_c\|^2 x^T(t)x(t) + \varepsilon_9\|U_c - L_c\|^2 x^T(t)x(t) \\ & + \varepsilon_9^{-1}\|U_d - L_d\|^2 y^T(t)y(t),\end{aligned} \tag{16}$$

$$y^T(t)D^T(\tilde{\otimes})D(\tilde{\otimes})y(t) \le y^T(t)L_d^T L_d y(t) + \big(2\|U_d - L_d\|\|L_d\| + \|U_d - L_d\|^2\big)y^T(t)y(t). \tag{17}$$

另外，

$$-\int_{t-\tau}^{t} x^T(s)Rx(s)\mathrm{d}s \le -\lambda_{\min}(R)\int_{t-\tau}^{t} x^T(s)x(s)\mathrm{d}s, \tag{18}$$

及由 Hölder 不等式知

$$z^T(t)z(t) \le \tau\int_{t-\tau}^{t} |G(t-s)x(s)|^2\mathrm{d}s \le \tau \sup_{0\le s\le\tau}|G(s)|^2\int_{t-\tau}^{t}|x(s)|^2\mathrm{d}s, \tag{19}$$

所以，将式 (5)-(19) 代入式 (4) 中整理后，再注意到 M，M_1，M_2，μ_1，μ_2 的定义及条件 (3) 可得

$$LV\big(t,x(t)\big) \le \big(x^T(t),\, y^T(t)\big)M\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix} \le \lambda_{\max}(M)\big[\,|x(t)|^2 + |y(t)|^2\big]. \tag{20}$$

再令 $\psi(t,x(t)) = \mathrm{e}^{r_0 t}V$，则由 Itô 公式知

$$\mathrm{E}\psi\big(t,x(t)\big) = \mathrm{E}\psi\big(0,x(0)\big) + \int_0^t \mathrm{E}L\psi\big(s,x(s)\big)\mathrm{d}s, \tag{21}$$

其中

$$L\psi\big(t,x(t)\big)=r_0\mathrm{e}^{r_0t}V\big(t,x(t)\big)+\mathrm{e}^{r_0t}LV\big(t,x(t)\big).$$

而根据Cauchy不等式和引理1知

$$\big|x(t)-F(\tilde{\otimes})\big|^2\le(1+k^2)\big[\,|x(t)|^2+|y(t)|^2\,\big],$$

且注意到$r_0(1+k^2)+\lambda_{\max}(M)<0$，所以易得

$$L\psi\big(t,x(t)\big)\ \le\ \mathrm{e}^{r_0t}\Big\{\big[\,r_0(1+k^2)+\lambda_{\max}(M)\,\big]|x(t)|^2+r_0\lambda_{\max}(Q)\int_{t-\tau}^{t}|x(s)|^2\mathrm{d}s$$
$$+r_0\lambda_{\max}(R)\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}|x(s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\Big\}. \tag{22}$$

若记$\mathrm{C}=\sup_{-\tau\le\theta\le0}\mathrm{E}|\xi(\theta)|^2$，则可推得

$$\mathrm{E}\psi\big(0,x(0)\big)\le\big[\,2(1+k^2)+\tau\lambda_{\max}(Q)+\tau^2\lambda_{\max}(R)\,\big]\mathrm{C}, \tag{23}$$

$$\int_0^t\mathrm{e}^{r_0s}\int_{s-\tau}^{s}\mathrm{E}|x(u)|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}s\le\tau\mathrm{e}^{r_0\tau}\int_0^t\mathrm{e}^{r_0s}\mathrm{E}|x(s)|^2\mathrm{d}s+\tau^2\mathrm{e}^{r_0\tau}\mathrm{C}, \tag{24}$$

$$\int_0^t\mathrm{e}^{r_0s}\int_{-\tau}^{0}\int_{s+\theta}^{s}\mathrm{E}|x(u)|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\le\tau\int_0^t\mathrm{e}^{r_0s}\int_{s-\tau}^{s}\mathrm{E}|x(u)|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$
$$\le\tau^2\mathrm{e}^{r_0\tau}\int_0^t\mathrm{e}^{r_0s}\mathrm{E}|x(s)|^2\mathrm{d}s+\tau^3\mathrm{e}^{r_0\tau}\mathrm{C}. \tag{25}$$

于是，由式(22)、(24)和(25)可得

$$\int_0^t\mathrm{E}L\psi\big(s,x(s)\big)\mathrm{d}s\ \le\ \big[\,r_0(1+k^2)+\lambda_{\max}(M)+r_0\tau\lambda_{\max}(Q)\mathrm{e}^{r_0\tau}+r_0\tau^2\lambda_{\max}(R)\mathrm{e}^{r_0\tau}\,\big]$$
$$\times\int_0^t\mathrm{e}^{r_0s}\mathrm{E}|x(s)|^2\mathrm{d}s+r_0\lambda_{\max}(Q)\tau^2\mathrm{e}^{r_0\tau}\mathrm{C}+r_0\lambda_{\max}(R)\tau^3\mathrm{e}^{r_0\tau}\mathrm{C}. \tag{26}$$

此外，利用基本不等式$2ab\le\varepsilon a^2+\varepsilon^{-1}b^2$ $(\varepsilon>0)$，并注意到k的定义，我们有

$$\mathrm{E}\psi\big(t,x(t)\big)\ \ge\ \mathrm{E}\big[\,\mathrm{e}^{r_0t}|x(t)-F(\tilde{\otimes})y(t)|^2\,\big]$$
$$\ge\ \mathrm{e}^{r_0t}\big[\,(1-k)\mathrm{E}|x(t)|^2-(k^{-1}-1)\mathrm{E}|F(\tilde{\otimes})y(t)|^2\,\big]$$
$$\ge\ \mathrm{e}^{r_0t}\big[\,(1-k)\mathrm{E}|x(t)|^2-(1-k)k\mathrm{E}|y(t)|^2\,\big]. \tag{27}$$

这样，结合式(21)、(23)、(26)和(27)及r_0的定义便有

$$(1-k)\mathrm{e}^{r_0t}\mathrm{E}|x(t)|^2\ \le\ \mathrm{C}_0+(1-k)k\mathrm{e}^{r_0t}\mathrm{E}|y(t)|^2$$
$$\le\ \mathrm{C}_0+(1-k)k\mathrm{e}^{r_0t}\sup_{-\tau\le\theta\le0}\mathrm{E}|x(t+\theta)|^2, \tag{28}$$

其中

$$\mathrm{C}_0=\big[\,2(1+k^2)+\tau\lambda_{\max}(Q)+\tau^2\lambda_{\max}(R)+r_0\lambda_{\max}(Q)\tau^2\mathrm{e}^{r_0\tau}+r_0\lambda_{\max}(R)\tau^3\mathrm{e}^{r_0\tau}\,\big]\mathrm{C}.$$

对于任意的 $0 \le t \le T$, $T \ge 0$，由式 (28) 知

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{r_0 t}\mathrm{E}|x(t)|^2 &\le \frac{\mathrm{C}_0}{1-k} + k\sup_{0\le t\le T}\Big[\mathrm{e}^{r_0 t}\sup_{-\tau\le\theta\le 0}\mathrm{E}\left|x(t+\theta)\right|^2\Big] \\ &= \frac{\mathrm{C}_0}{1-k} + k\sup_{0\le t\le T}\Big[\sup_{t-\tau\le s\le t}\mathrm{e}^{r_0(s-\theta)}\mathrm{E}\left|x(s)\right|^2\Big] \\ &\le \frac{\mathrm{C}_0}{1-k} + k\mathrm{e}^{r_0\tau}\sup_{-\tau\le t\le T}\Big[\mathrm{e}^{r_0 t}\mathrm{E}\left|x(t)\right|^2\Big], \quad s = t+\theta. \end{aligned} \tag{29}$$

显然，对于 $-\tau \le t \le 0$，式 (29) 也成立。于是

$$\sup_{-\tau\le t\le T}\big[\mathrm{e}^{r_0 t}\mathrm{E}|x(t)|^2\big] \le \frac{\mathrm{C}_0}{1-k} + k\mathrm{e}^{r_0\tau}\sup_{-\tau\le t\le T}\big[\mathrm{e}^{r_0 t}\mathrm{E}|x(t)|^2\big]. \tag{30}$$

这样，由式 (30) 及 r_0 满足的条件可知

$$\mathrm{E}|x(t)|^2 \le \frac{\mathrm{C}_0}{(1-k)(1-k\mathrm{e}^{r_0\tau})}\mathrm{e}^{-r_0 t}, \tag{31}$$

即系统 (2) 是均方指数鲁棒稳定的。

注 1 在实际应用时，要确定定理 1 中的判断矩阵 M 是否负定，关键是能否找到使它负定的参数 $\varepsilon_i\ (i=1,2,\cdots,9)$ 和正定矩阵 Q 及 R，而用手工调试寻找的办法显然是不易的。不过，我们可以先让

$$Q = k_1 I_n,\quad k_1 > 0,\quad R = k_2 I_n,\quad k_2 \ge \big(\varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_6^{-1}\big)\tau\sup_{0\le s\le\tau}\|G(s)\|^2,$$

这样，便可以把此问题看作是一个关于 ε_i, k_1 和 k_2 的多元非线性矩阵函数的负定问题。虽然此时仍不易有效地采用手工方式获取一组 ε_i, k_1 和 k_2 值，但本文可以采用类似于文献 [12] 中的自由参数的优选方法，通过编制一个程序，让计算机自动搜索一组使判断矩阵负定且具有较快收敛性的 ε_i, k_1 和 k_2 值。当然，也可以先取定 k_1 和 k_2，然后编程选取自由参数 ε_i。自由参数的优选算法为:

步骤 1 输入已知矩阵和常数;

步骤 2 给定最大搜索计算次数，如 $i = m$。选用一个 for 循环指令;

步骤 3 让计算机随机产生一个 l 维向量 ε (l 表示非线性判别矩阵中的自由参数的个数，ε 中的 l 个随机数是区间 [0,1] 上的数);

步骤 4 计算判别矩阵 M 及其最大特征值 λ;

步骤 5 如果 $\lambda < 0$，让 $\lambda^* = \lambda$, $\varepsilon^* = \varepsilon$，否则，返回步骤 2;

步骤 6 如果 $i = 1$，令 $\max\lambda^* = \lambda^*$, $\max\varepsilon^* = \varepsilon^*$，否则，令 $\max\lambda^{**} = \lambda^*$, $\max\varepsilon^{**} = \varepsilon^*$;

步骤 7 如果 $\max\lambda^{**} < \max\lambda^*$，令 $\max\lambda^* = \max\lambda^{**}$, $\max\varepsilon^* = \max\varepsilon^{**}$，否则，返回步骤 2;

步骤 8 若 $i = m$，结束运算，否则，返回步骤 2。

下面，我们基于定理 1，推出一个由线性矩阵不等式 (LMI) 表示的指数鲁棒稳定性判据。

推论 1 设 $k = \|L_f\| + \|U_f - L_f\| < 1$。如果存在正常数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_9$ 和正定矩阵 Q 使得矩阵

$$N := \begin{pmatrix} N_1 & L_b + L_c^T L_d - L_a^T L_f & \Omega \\ L_b^T + L_d^T L_c - L_f^T L_a & N_2 + N_3 & 0 \\ \Omega^T & 0 & -J \end{pmatrix} < 0,$$

其中

$$
\begin{aligned}
N_1 &= L_a + L_a^T + L_c^T L_c + Q + \big(2\|U_a - L_a\| + 2\|U_c - L_c\|\|L_c\| + \|U_c - L_c\|^2\big) I_n, \\
N_2 &= L_d^T L_d - L_f^T L_b - L_b^T L_f - Q + \big[\, \|U_d - L_d\|^2 + 2\|U_f - L_f\|\|L_b\| + 2\|U_b - L_b\|\|L_f\| \\
&\quad + 2\|U_f - L_f\|\|U_b - L_b\| + 2\|U_d - L_d\|\|L_d\| \,\big] I_n, \\
N_3 &= \big[\, \alpha_1\|U_b - L_b\|^2 + (\alpha_3 + \alpha_5)\|U_f - L_f\|^2 + \alpha_6\big(\|U_f - L_f\|^2 + 2\|U_f - L_f\|\|L_f\|\big) \\
&\quad + (\alpha_7 + \alpha_9)\|U_d - L_d\|^2 \,\big] I_n + (\alpha_4 + \alpha_6) L_f^T L_f + \alpha_8 L_d^T L_d,
\end{aligned}
$$

而

$$J = \mathrm{diag}\big(\alpha_1 I_n,\ \alpha_2 I_n,\ \alpha_2 I_n,\ \alpha_3 I_n,\ \alpha_4 I_n,\ \alpha_5 I_n,\ \alpha_6 I_n,\ \alpha_7 I_n,\ \alpha_8 I_n,\ \alpha_9 I_n\big)$$

是一个块对角矩阵，

$$
\begin{aligned}
\Omega = \Big(& I_n,\ \alpha_2 I_n,\ \tau\sqrt{\sup_{0\le s\le\tau}\|G(s)\|^2} I_n,\ L_a^T,\ \|U_a - L_a\| I_n, \\
& \|U_a - L_a\| I_n,\ \tau\sqrt{\sup_{0\le s\le\tau}\|G(s)\|^2} I_n,\ L_c^T,\ \|U_c - L_c\| I_n,\ \|U_a - L_a\| I_n\Big)
\end{aligned}
$$

是一个单行块矩阵，那么系统 (2) 是均方指数鲁棒稳定的，且 Lyapunov 指数为 $-r_0$。而 r_0 满足：$r_0 > 0$, $k\mathrm{e}^{r_0\tau} < 1$ 及

$$r_0(1 + k^2) + \lambda_{\max}(N) + r_0\lambda_{\max}(Q)\,\tau\,\mathrm{e}^{r_0\tau} + r_0\tau^3\mathrm{e}^{r_0\tau}(\alpha_2^{-1} + \alpha_6^{-1}) \sup_{0\le s\le\tau}\|G(s)\|^2 \le 0.$$

证明 若令定理 1 中的

$$R = \big(\varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_6^{-1}\big)\tau \sup_{0\le s\le\tau}\|G(s)\|^2 I_n, \quad \alpha_i = \varepsilon_i^{-1}, \quad i = 1,3,5,7,9, \quad \alpha_j = \varepsilon_j, \quad j = 2,4,6,8,$$

同时，根据引理 2 进行变换，即可由定理 1 证得推论 1。

定理 2 如果定理 1 或推论 1 中的条件成立，那么系统 (2) 又是几乎必然指数鲁棒稳定的。

证明 若定理 1 或推论 1 中的条件成立，即系统 (2) 是均方指数鲁棒稳定的，则存在正常数 r_0 和 K 使得

$$\mathrm{E}|x(t;\xi)|^2 \le K \sup_{-\tau\le\theta\le 0} \mathrm{E}|\xi(\theta)|^2 \mathrm{e}^{-r_0 t}, \quad \xi \in \mathrm{L}^2_{\mathcal{F}_0}\big([-\tau,0];\mathrm{R}^n\big), \quad t \ge 0.$$

现记

$$l = \|L_f\| + \|U_f - l_f\| < 1, \quad \hat{r} = \min\big\{r_0, \tau^{-1}, \ln\, l^{-1}\big\},$$

则对于任意的 $\delta \in (0,\hat{r})$ 和任意的整数 $k \ge 1$，应用著名的 Doob 的半鞅不等式和 Cauchy 不等式

可得

$$\begin{aligned}
&P\Big(\omega: \sup_{0\le s\le\tau}\big|x(k\tau+s)-F(\tilde{\otimes})x_{k\tau+s}\big|^2>\mathrm{e}^{-(\hat{r}-\delta)k\tau}\Big)\\
\le&\ \frac{\mathrm{E}\big|x(k\tau+\tau)-F(\tilde{\otimes})x_{k\tau+\tau}\big|^2}{\mathrm{e}^{-(\hat{r}-\delta)k\tau}}\le\frac{\big(1+\|F(\tilde{\otimes})\|^2\big)\big(\mathrm{E}|x(k\tau+\tau)|^2+\mathrm{E}|x_{k\tau+\tau}|^2\big)}{\mathrm{e}^{-(\hat{r}-\delta)k\tau}}\\
\le&\ \frac{(1+l^2)\Big[K\mathrm{e}^{-r_0(k\tau+\tau)}\sup\limits_{-\tau\le\theta\le0}\mathrm{E}|\xi(\theta)|^2+K\mathrm{e}^{-r_0(k\tau+\tau+\theta)}\sup\limits_{-\tau\le\theta\le0}\mathrm{E}|\xi(\theta)|^2\Big]}{\mathrm{e}^{-(\hat{r}-\delta)k\tau}}\\
=&\ K(1+l^2)\big(\mathrm{e}^{-r_0\tau}+\mathrm{e}^{-r_0(\tau+\theta)}\big)\mathrm{e}^{(\hat{r}-r_0)k\tau-\delta k\tau}\sup_{-\tau\le\theta\le0}\mathrm{E}|\xi(\theta)|^2\\
\le&\ K(1+l^2)\big(1+\mathrm{e}^{-r_0\tau}\big)\mathrm{e}^{-\delta k\tau}\sup_{-\tau\le\theta\le0}\mathrm{E}|\xi(\theta)|^2,
\end{aligned}\tag{32}$$

进而，由著名的Borel-Cantelli引理知，对于几乎所有的$\omega\in\Omega$和除了有限个正整数k之外的所有正整数，都有

$$\sup_{0\le s\le\tau}\big|x(k\tau+s)-F(\tilde{\otimes})x_{k\tau+s}\big|^2\le\mathrm{e}^{-(\hat{r}-\delta)k\tau},\tag{33}$$

因此，存在一个正整数$k_0(\omega)$，使得对于几乎所有的$\omega\in\Omega$，包括P零可测集，当$k\ge k_0$时，式(33)都成立。也就是说，如果$t\ge k_0\tau$，那么，对于几乎所有的$\omega\in\Omega$，都有

$$\big|x(t)-F(\tilde{\otimes})x_t\big|^2\le\mathrm{e}^{-(\hat{r}-\delta)t}.$$

由于$|x(t)-F(\tilde{\otimes})x_t|^2$在区间$[0,k_0\tau]$上是有限的，所以，存在一个有限的正数$\mathrm{C}^*=\mathrm{C}^*(\omega)$，使得对于几乎所有的$\omega\in\Omega$和$t\ge0$，都有

$$\big|x(t)-F(\tilde{\otimes})x_t\big|^2\le\mathrm{C}^*\mathrm{e}^{-(\hat{r}-\delta)t}.\tag{34}$$

另外，基于式(34)，类似于式(30)的推导过程，我们可以得到：对于任何的实数$T>0$，都有

$$\big(1-l\mathrm{e}^{(\hat{r}-\delta)\tau}\big)\sup_{-\tau\le t\le T}\big[\mathrm{e}^{(\hat{r}-\delta)t}|x(t)|^2\big]\le\frac{\mathrm{C}^*}{1-l}.$$

进而，得

$$\mathrm{e}^{(\hat{r}-\delta)t}|x(t)|^2\le\frac{\mathrm{C}^*}{(1-l)(1-l\mathrm{e}^{(\hat{r}-\delta)\tau})},$$

这样便有

$$\limsup_{t\to\infty}\Big[\frac{1}{t}\ln|x(t;\xi)|\Big]\le-\frac{(\hat{r}-\delta)}{2},\quad a.s.,$$

于是，若令$\delta\to0$，则有

$$\limsup_{t\to\infty}\Big[\frac{1}{t}\ln|x(t;\xi)|\Big]\le-\frac{\hat{r}}{2},\quad a.s.,$$

这就说明了定理2是成立的。

注2 事实上，在上述定理或推论的判据中，$\|U_i-L_i\|$，$i=a,b,c,d,f$可看作是系统(2)的灰参数的绝对灰度构成的矩阵的范数。如果这些灰参数的绝对灰度是变化的，那么，我们可以

基于推论 1 的判据，来探讨灰参数的绝对灰度的变化对系统的指数稳定性和时滞长度的影响情况。文中把灰色矩阵的连续覆盖进行如此分解的好处就是：既可以借此讨论绝对灰度矩阵的变化对系统的指数稳定性和时滞长度的影响情况，又可以减少或避免灰矩阵中所包含的信息量的损失或破坏。

注 3 如果令系统 (2) 中的 $G(s)\equiv 0$ 或 $F(\otimes)\equiv 0$，我们可以利用定理 1 或推论 1，分别得到与系统 (2) 相对应的中立型灰色随机时滞系统和灰色随机分布时滞系统的指数鲁棒稳定的判据，这里不再详述。而对这两类灰色系统的指数鲁棒稳定性的研究，目前也没有相关报道。

4 数值例子

例 1 考虑一个二维的中立型灰色随机分布时滞线性系统，其灰参数矩阵的连续矩阵覆盖集 F_I, A_I, B_I, C_I 和 D_I 的上下界矩阵及其权重矩阵函数分别为

$$L_f=\begin{pmatrix}-0.285 & 0.113\\ 0.112 & -0.283\end{pmatrix},\ U_f=\begin{pmatrix}-0.275 & 0.125\\ 0.123 & -0.273\end{pmatrix},\ L_a=\begin{pmatrix}-3.870 & -0.531\\ 0.513 & -3.760\end{pmatrix},$$

$$U_a=\begin{pmatrix}-3.750 & -0.521\\ 0.524 & -3.630\end{pmatrix},\ L_b=\begin{pmatrix}-0.639 & 0.138\\ 0.106 & -0.636\end{pmatrix},\ U_b=\begin{pmatrix}-0.629 & 0.146\\ 0.117 & -0.626\end{pmatrix},$$

$$L_c=\begin{pmatrix}0.136 & -0.113\\ -0.103 & 0.125\end{pmatrix},\ U_c=\begin{pmatrix}0.146 & -0.104\\ -0.092 & 0.136\end{pmatrix},\ L_d=\begin{pmatrix}0.417 & -0.169\\ -0.112 & 0.422\end{pmatrix},$$

$$U_d=\begin{pmatrix}0.426 & -0.159\\ -0.101 & 0.433\end{pmatrix},\ G(s)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{s-3}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{s}{2}}\end{pmatrix},$$

系统的时滞长度为 $\tau=0.1$。

显然，$\sup\limits_{0\le s\le\tau}\|G(s)\|^2=\mathrm{e}^{-3}$。若令定理 1 的判据中的

$$Q=k_1I_n,\quad \lambda_{\min}(R)=(\varepsilon_2^{-1}+\varepsilon_6^{-1})\tau\sup_{0\le s\le\tau}\|G(s)\|^2,$$

那么，利用前面所给的算法，通过对 $M<0$ 在 Matlab Editor/Debugger 环境中编程计算，获得的使判别矩阵 M 较快收敛的参数 ε_i，$i=1,2,\cdots,9$，k_1 及由此而得的最大的负特征值和指数收敛速率分别为

$$\varepsilon_1=0.0779,\quad \varepsilon_2=0.1199,\quad \varepsilon_3=0.0076,\quad \varepsilon_4=0.4887,\quad \varepsilon_5=0.0225,$$

$$\varepsilon_6=0.1090,\quad \varepsilon_7=0.1747,\quad \varepsilon_8=0.0742,\quad \varepsilon_9=0.7983,\quad k_1=3.0000,$$

$$\lambda_{\max}(M)=-1.2372,\quad r_0=0.7685.$$

从上述的数值结果可以看到，根据定理 1，我们可以判断出本例所描述的系统是指数鲁棒稳定的，且有较快的指数收敛速率。也就是说，定理 1 所提供的判据都是有效的。当然也说明了推论 1 的判据的有效性。

下面，我们基于推论 1，利用例 2 来说明灰参数矩阵的绝对灰度矩阵的变化对系统的指数稳定性和时滞长度的影响。

例2　假设在例1的二维系统中，系统的灰参数矩阵的绝对灰度矩阵都是变化的，且绝对灰度矩阵满足$\|U_i - L_i\| \leq \delta,\ \delta \geq 0$，$L_i$和$G(s)$同例1，$i = a, b, c, d, f$，那么，通过对推论1中的判据$N < 0$进行编程，并利用Matlab中的线性矩阵不等式(LMI)工具箱求解得到，在δ取不同的值时，有关时滞长度τ、判别矩阵N的最大特征值λ及Lyaunpov指数$-r_0$的不同数值，这些数值被列在表1中。

表1：数值分析

δ	0	0.01	0.05	0.10	0.15	0.18	0.1835
τ	1.6648	1.5811	1.1287	0.5976	0.3103	0.0519	0.0030
λ	-0.8623	-0.8205	-0.6384	-0.3491	-0.1756	-0.0328	-0.0016
$-r_0$	-0.0908	-1.6733	-0.0941	-0.0847	-0.0674	-0.0234	-0.0013

从表1中的数值可以看到，随着δ的增大，τ随之减小，λ随之增大，$-r_0$则先减后增。也就是说，这个二维系统的指数稳定性随着灰参数矩阵的绝对灰度矩阵的范数δ的增大而逐渐减弱，且使该系统保持指数稳定的绝对灰度矩阵的范数δ及相应的时滞长度τ的最大允许取值范围分别是$[0, 0.1835]$和$[0.0030, 1.6648]$。

5　结论

通过对一类中立型灰色随机分布时滞系统的指数稳定性研究，分别得到了该系统指数鲁棒稳定的非线性矩阵判据和线性矩阵判据。针对非线性矩阵判据，提出了一个简单有效的算法。同时证明了该系统在均方指数鲁棒稳定的条件下，又是几乎必然指数鲁棒稳定的。实例说明，所给判据是有效的，且系统的指数稳定性和时滞是随着灰参数矩阵的绝对灰度矩阵的范数的增加而减小的。该判据在实际应用方面是简单方便的，对区间灰矩阵分解出的灰矩阵部分，不需要再将其分解成符合某种假设条件的一些矩阵的乘积形式，只需要借助区间灰矩阵的连续矩阵覆盖集的上下界矩阵和一个简单小程序就能判断系统的指数稳定性。

参考文献：

[1] Guan Z H, *et al*. Delay-dependent stability and stabilizability of uncertain jump bilinear stochastic systems with mode-dependent time-delays[J]. International Journal of Systems Science, 2005, 36(5): 275-285

[2] Kolmanovskii V B, Nosov V R. Stability of Functional Differential Equations[M]. New York: Academic Press, 1986

[3] Kolmanovskii V B, Myshkis A D. Applied Theory of Functional Differential Equations[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1992

[4] Mao X. Razumikhin type theorems on exponential stability of neutral stochastic functional differential equations[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1997, 28(2): 389-401

[5] 廖晓昕，毛学荣. 随机中立型微分方程稳定性[J]. 科学通报，1997, 42(10): 1117-1118
Liao X X, Mao X R. Stability of neutral stochastic differential equations[J]. Chinese Science Bulletin, 1997, 42(10): 1117-1118

[6] 沈轶，廖晓昕. 随机中立型泛函微分方程的指数稳定的Razumikhin型定理[J]. 科学通报，1998, 43(21): 2272-2275

Shen Y, Liao X X. Razumikhin-type theorem on exponential stability of neutral stochastic functional differential equations[J]. Chinese Science Bulletin, 1998, 43(21): 2272-2275

[7] Randjelovic J, Jankovic S. On the pth moment exponential stability criteria of neutral stochastic functional differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 326(1): 266-280

[8] Liu K, Xia X. On the exponential stability in mean square of neutral stochastic functional differential equations[J]. Systems & Control Letters, 1999, 37(4): 207-215

[9] 江明辉等. 不确定中立线性随机时滞系统的鲁棒稳定性[J]. 应用数学和力学，2007, 28(6): 741-748
Jiang M H, *et al.* Robust stability of uncertain neutral linear stochastic differential delay systems[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(6): 741-748

[10] Xu S Y, *et al.* Robust stochastic stabilization and control of uncertain neutral stochastic time-delay systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 314(1): 1-16

[11] Li Q X, Liu S F. The foundation of the grey matrix and the grey input-output analysis[J]. Applied Mathematics Modelling, 2008, 32(3): 267-291

[12] 苏春华，刘思峰. 灰色随机线性时滞系统的渐近稳定性[J]. 控制与决策，2008, 23(5): 571-574
Su C H, Liu S F. Asymptotic stability of grey stochastic linear delay systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(5): 571-574

Exponential Robust Stability of Grey Neutral Stochastic Systems with Distributed Delays

SU Chun-hua[1], LIU Si-feng[2]

(1- College of Mathematics and Information Science, Xinyang Normal University, Xinyang 464000; 2- College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

Abstract: In this paper, we investigate the exponential robust stability for a class of grey neutral stochastic systems with distributed delays. By constructing the Lyapunov-Krasovskii functional and applying the decomposition technique of continuous matrix-covered sets of grey matrix and the Itô formula, the delay-dependent criteria for exponential robust stability are formulated in the forms of non-linear matrix inequalities and linear matrix inequalities, respectively. A generic algorithm for the non-linear matrix inequalities is given. The existent criteria for non-linear matrix inequalities are not convenient for applications in practice, and our algorithm solves this problem. Numerical examples demonstrate the effectiveness of the presented criteria, and that the exponential stability and time-delay of systems decrease as the spectral norm of the absolute grey-degree matrix increases.

Keywords: neutral stochastic systems; distributed delays; exponential robust stability; grey matrix; linear matrix inequalities

Received: 21 July 2008. **Accepted:** 10 Dec 2009.

Foundation item: The Natural Science Foundation of Henan Province (0611054400); the Natural Science Foundation of Henan Education Department of China (2008A110015).